Пушкина Н.В., канд. экон. наук, доцент,
Никитин А.В., аспирант СПбГУЭФ

Оптимизация издержек методом динамического программирования в многопериодной детерминированной модели поддержания складских запасов

1. Исходные данные и постановка задачи

Многопериодная детерминированная модель поддержания складских запасов формализована следующими характеристиками:

А. Временные периоды пронумерованы от 1 до T. При этом расход ресурса со склада в течение каждого периода известен в начале периода 1.

Б. В начале каждого периода на предприятии принимается решение о количестве поставляемого в этом периоде ресурса. Объём поставок в течение периода ограничен.

В. Расход ресурса со склада в течение каждого периода d_t полностью обеспечивается складским запасом или поставкой в течение этого периода. Поставка предполагает условно-постоянные и переменные издержки на единицу ресурса[1].

Г. Складская площадь ограничена, что означает ограничение размера запаса в конце каждого периода. На каждую единицу ресурса, находящуюся на складе в конце периода, начисляются издержки по хранению.

Д. Цель предприятия: свести к минимуму суммарные расходы по поддержанию складского запаса за все периоды с 1 по T.

Е. В конце каждого периода проводится инвентаризация и принимается решение о поставке в течение следующего периода.

Решение данной задачи будет продемонстрировано на примере предприятия – поставщика промышленной стальной ленты для одного артикула этого ресурса. Исходные данные лиц, принимающих решения (ЛПР), следующие:

- период – одна календарная неделя, количество периодов – 4;
- еженедельный расход ресурса со склада: неделя 1 – d_1= 1 тонна, неделя 2 – d_2= 3 тонны, неделя 3 – d_3= 2 тонны, неделя 4 – d_4= 4 тонны;
- условно-постоянные и переменные издержки на поставку одной тонны в течение любого периода €3 и €1 соответственно, расходы на хранение одной тонны в течение недели – h= €0,5;
- в течение календарной недели в составе консолидированного груза на склад может быть доставлено не более 5 тонн данного ресурса, а в конце недели на складе может оставаться не более 4 тонн;
- в первый день недели 1 складской запас i_1 стальной ленты данного вида был равен 0.

[1] Зависимость удельных общих издержек от количества единиц ресурса не линейна.

2. Общее описание решения задачи

Для динамического программирования определяются стадия и состояние. В данном случае последовательными стадиями является календарные недели, а состоянием – складской запас на утро первого дня недели. С учётом описанных выше ограничений возможны следующие количественные характеристики состояния: 0, 1, 2, 3, 4, и имеют место четыре стадии процесса поставки. Минимальные издержки по поддержанию в каждом периоде необходимого складского запаса обозначены $f_t(i)$, где t – номер недели, i – количество тонн ленты на складе на утро первого дня недели. Издержки по доставке на склад q тонн ресурса в течение календарной недели обозначаются $c(q)$; таким образом, $c(q)$ = 0 при q = 0, и $c(q)$ = €3 + € q при q>0. Динамическое программирование подразумевает такую последовательность: определяются издержки $f_4(0)$, $f_4(1)$, $f_4(2)$, $f_4(3)$, $f_4(4)$, исходя из этих данных, высчитываются значения $f_3(0)$, $f_3(1)$, $f_3(2)$, $f_3(3)$, $f_3(4)$, на основании последних делается расчёт $f_2(0)$, $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_2(3)$, $f_2(4)$, и наконец, $f_1(0)$. Затем определяется оптимальный объём поставок для каждой из четырёх недель $q_t(i)$, где t – номер недели, i – начальный запас на складе.

3. Числовое решение задачи

3.1. Расчёт для периода 4

В течение 4-й недели на склад предприятия должно быть доставлено такое количество ресурса, чтобы с учётом расхода со склада, не возник дефицит. То есть:

$$q_4(i_4)= d_4 - i_4;\ f_4(i_4) = c(d_4 - i_4) \qquad (1)$$

Тогда расчёт издержек примет вид:

$q_4(0)$= 4 m – 0m = 4m; $f_4(0)$= c(4m – 0m)= c(4)= €3 + €4 = €7.

$q_4(1)$= 4 m – 1m = 3m; $f_4(1)$= c(4m – 1m)= c(3)= €3 + €3 = €6.

$q_4(2)$= 4 m – 2m = 2m; $f_4(2)$= c(4m – 2m)= c(2)= €3 + €2 = €5.

$q_4(3)$= 4 m – 1m = 3m; $f_4(3)$= c(4m – 3m)= c(1)= €3 + €1 = €4.

$q_4(4)$= 4 m – 4m = 0m; $f_4(4)$= c(4m – 4m)= c(0)= €0.

3.2. Расчёт для периода 3

Издержки $f_3(i_3)$ – минимальные суммарные издержки, понесённые предприятием, при условии, что складской запас на утро первого дня третьей недели равен i_3. Для любого размера поставки q_3 на третьей неделе указанные суммарные издержки составят:

$$h(i_3 + q_3 - d_3) + c(q_3) + f_4(i_3 + q_3 - d_3) \qquad (2)$$

Первое слагаемое выражения (2) – произведение издержек на хранение тонны ресурса на складе в течение недели на запас в конце недели 3, второе слагаемое – издержки на поставку в течение третьей недели, а четвёртая неделя начинается со складским запасом $i_3 + q_3 - d_3$ и третье слагаемое представляет собой минимальные издержки по обеспечению расхода со склада в течение четвёртой недели. Тогда оптимальные издержки недели 4:

$$f_3(i) = min\{h(i_3 + q_3 - d_3) + c(q_3) + f_4(i_3 + q_3 - d_3)\} \quad (3)$$

$$0 \le i_3 + q_3 - d_3 \le 4$$

$$q_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Варианты решения по модели (3) представлены в табл. 1.

Таблица 1. Поле решений задачи оптимизации издержек в периоде 3

i_3	q_3	$h(i_3 + q_3 - d_3) + c(q_3)$	$f_4(i_3 + q_3 - d_3)$	$f_3(i_3)$	Решение
0	2	0 + 5 = 5	7	12	$f_3(0)=12;\ q_3(0)=2$
0	3	½ + 6 = 13/2	6	25/2	
0	4	1 + 7 = 8	5	13	
0	5	3/2 + 8 = 19/2	4	27/2	
1	1	0 + 4 = 4	7	11	$f_3(1)=10;\ q_3(1)=5$
1	2	½ + 5 = 11/2	6	23/2	
1	3	1 + 6 = 7	5	12	
1	4	3/2 + 7 = 17/2	4	25/2	
1	5	2 + 8 = 10	0	10	
2	0	0 + 0 = 0	7	7	$f_3(2)=7;\ q_3(2)=0$
2	1	½ + 4 = 9/2	6	21/2	
2	2	1 + 5 = 6	5	11	
2	3	3/2 + 6 = 15/2	4	23/2	
2	4	2 + 7 = 9	0	9	
3	0	½ + 0 = ½	6	13/2	$f_3(3)=13/2;\ q_3(3)=0$
3	1	1 + 4 = 5	5	10	
3	2	3/2 + 5 = 13/2	4	21/2	
3	3	2 + 6 = 8	0	8	
4	0	1 + 0 = 1	5	6	$f_3(4)=6;\ q_3(4)=0$
4	1	3/2 + 4 = 11/2	4	19/2	
4	2	2 + 5 = 7	0	7	

3.3. Расчёт для периода 2

$f_2(i_2)$ – минимальные суммарные расходы в течение второй, третьей и четвёртой недель, при условии что запас в начале первого дня второй недели – i_2, размер поставки на второй неделе – q_2, расход со склада $d_2 = 3m$. Тогда общие издержки по хранению и поставке на второй неделе: $h(i_2 + q_2 - d_2) + c(q_2)$. Оптимальные издержки третьей и четвёртой недель определены, и поскольку третья неделя начинается с уровня запаса $i_3 = i_2 + q_2 - d_2$, суммарные оптимальные издержки третьей и четвёртой недель: $f_3(i_2 + q_2 - d_2)$. По аналогии с выражением (3) формулируется оптимизационная задача для второго периода:

$$f_2(i_2) = min\{h(i_2 + q_2 - d_2) + c(q_2) + f_3(i_2 + q_2 - d_2)\} \quad (4)$$

$$0 \le i_2 + q_2 - d_2 \le 4$$

$$q_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Поле решений для $f_2(0)$, $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_2(3)$, $f_2(4)$ по модели (4) представлено в табл. 2.

Таблица 2. Поле решений задачи оптимизации издержек в периоде 2

i_2	q_2	$h(i_2 + q_2 - d_2) + c(q_2)$	$f_3(i_2 + q_2 - d_2)$	$f_2(i_2)$	Решение
0	3	0 + 6 = 6	12	18	$f_2(0)=16;\ q_2(0)=5$
0	4	½ + 7 = 15/2	10	35/2	
0	5	1 + 8 = 9	7	16	
1	2	0 + 5 = 5	12	17	$f_2(1)=15;\ q_2(1)=4$
1	3	½ + 6 = 13/2	10	33/2	
1	4	1 + 7 = 8	7	15	
1	5	3/2 + 8 = 19/2	13/2	16	
2	1	0 + 4 = 4	12	16	$f_2(2)=14;\ q_2(2)=3$
2	2	½ + 5 = 11/2	10	31/2	
2	3	1 + 6 = 7	7	14	
2	4	3/2 + 7 = 17/2	13/2	15	
2	5	2 + 8 = 10	6	16	
3	0	0 + 0 = 0	12	12	$f_2(3)=12;\ q_2(3)=0$
3	1	½ + 4 = 9/2	10	29/2	
3	2	1 + 5 = 6	7	13	
3	3	3/2 + 6 = 15/2	13/2	14	
3	4	2 + 7 = 9	6	15	
4	0	½ + 0 = ½	10	21/2	$f_2(4)=21/2;\ q_2(4)=0$
4	1	1 + 4 = 5	7	12	
4	2	3/2 + 5 = 13/2	13/2	13	
4	3	2 + 6 = 8	6	14	

3.4. Расчёт для периода 1

Оптимизационная модель суммарных издержек составляется точно так же, как модель второго периода, и выглядит так:

$$f_1(i_1) = min\{h(i_1 + q_1 - d_1) + c(q_1) + f_2(i_1 + q_1 - d_1)\} \quad (5)$$

$$0 \le i_1 + q_1 - d_1 \le 4$$

$$q_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

По условиям задачи начальный остаток на складе в первом периоде $i_1 = 0.$, а расход со склада в первом периоде $d_1 = 1m$. Поэтому поле решений модели (5) сужается до расчётов $f_1(0)$ и $q_1(0)$, как показано в табл. 3.

Таблица 3. Поле решений задачи оптимизации издержек в периоде 1

i_1	q_1	$h(i_1 + q_1 - d_1) + c(q_1)$	$f_2(i_1 + q_1 - d_1)$	$f_1(i_1)$	Решение
0	1	0 + 4 = 4	16	20	$f_1(0)=20;\ q_1(0)=1$
0	2	½ + 5 = 11/2	15	41/2	
0	3	1 + 6 = 7	14	21	
0	4	3/2 + 7 = 17/2	12	41/2	
0	5	2 + 8 = 10	21/2	41/2	

3.5. Составление оптимального графика поставок

Сделанные расчёты позволяют составить оптимальный график поставок для всех четырёх периодов. Начальный запас i_1= 0, и оптимальный размер поставки на первой неделе – $q_1(0)=1m$. Тогда вторая неделя начнётся с запасом:

$i_2= i_1 + q_1(0) - d_1 = 0 + 1 - 1 = 0$. Следовательно, на второй неделе будет поставлено $q_2(0)= 5m$ (табл. 2), и на утро первого рабочего дня третьей недели складской запас составит $i_3= i_2 + q_2(0) - d_2 = 0 + 5 - 3 = 2m$. По данным табл. 1 объём поставки третьего периода $q_3(2)$ должен быть равен 0, а это определяет начальный запас недели № 4: $i_4= i_3 + q_3(2) - d_3 =2 + 0 - 2 = 0$. Для обеспечения заданного расхода в четвёртом периоде потребуется поставка размером $q_4(0)=4m$. Таким образом, оптимальный график поставок:

неделя 1 – *1m*
неделя 2 – *5m*
неделя 3 – *0*
неделя 4 – *4m*.

4. Графическое представление задачи

Рис. 1 демонстрирует графическое или сетевое представление рассматриваемой оптимизационной задачи и её решения.

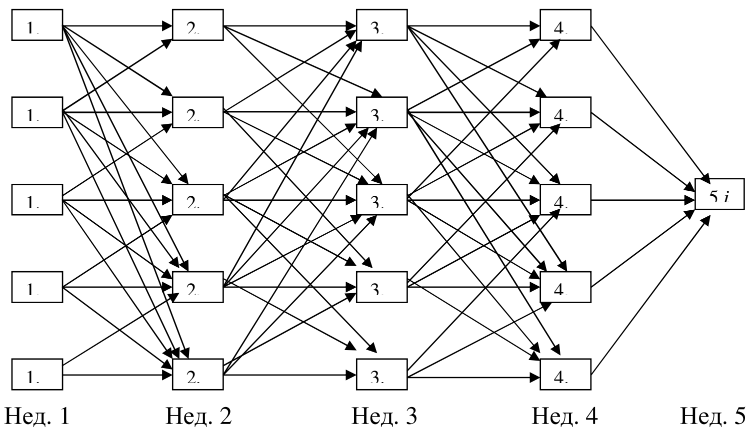

Рис. 1. Графическое представление задачи оптимизации издержек в многопериодной детерминированной модели поддержания складских запасов

Каждая горизонталь соответствует состоянию складского запаса на начало соответствующей недели, а каждая вертикаль – стадии или неделе. Каждая линия указывает на изменение состояния запаса на следующей стадии, если на текущей стадии будет принято соответствующее решение, с учётом расхода ресурса со склада на текущей неделе. Длина линии характеризует сумму расходов по хранению и поставке в текущем периоде, если будет принято решение, соответствующее направлению этой линии. Некоторые, находящиеся на соседних вертикалях, узлы сетки не соединены линиями. Это объясняется заданными для каждого периода значениями расхода.

Для рассматриваемого примера оптимальная схема поддержания складского запаса при заданных условиях соответствует кратчайшему пути от узла 1.0 до узла 5.i_5. Как показывают приведённые выше вычисления, этот путь направлен по линиям следующих размеров поставок: 1*m*, 5*m*, 0 и 4*m*. Начало – точка 1.0, затем переход на 2.0: (1.0+1–1)=(2.0). Следующий этап – точка 3.2: (2.0+5–3)=(3.2); от неё – на точку 4.0: (3.2+0–2)=(4.0). Конечный пункт – узел 5.0: (4.0+4–4)=(5.0), т.е. в данном случае i_5=0. Таким образом, оптимальная схема поставок и поддержания уровня запаса в описанных условиях соответствует цепи переходов: (1.0)–(2.0)–(3.2)–(4.0)–(5.0).

5. Оптимизация издержек методом динамического программирования в многопериодной детерминированной модели поддержания складских запасов средствами Microsoft Excel

Прикладной пакет Excel – эффективный инструмент решения задач динамического программирования, позволяет оптимизировать издержки в многопериодной системе запас – поставка. Решение рассмотренного в статье примера с помощью Excel показано на рисунке 2.

Как было показано выше, задача сводится к решению по следующей модели:

$$f_t(i_t) = min\,\{h(i_t + q_t - d_t) + c(q_t) + f_{t+1}(i_t + q_t - d_t)\} \qquad (6)$$
$$0 \le i_t + q_t - d_t \le 4$$
$$q_t=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

Пусть $(h(i_t + q_t - d_t) + c(q_t) + f_{t+1}(i_t + q_t - d_t))=J_t(i_t,q_t)$, т.е. задача состоит в нахождении наименьшего $J_t(i_t,q_t)$ при заданных условиях.

В диапазоне B1:G2 введены размеры поставок и соответствующие им суммарные издержки. Значения $J_t(i_t,q_t)$ рассчитываются в диапазоне A13:AF16 с помощью функции горизонтального просмотра. Например, для определения $J_4(0,2)$ в ячейку E13 вводится формула:

=ГПР(E$11,$B$1:$G$2,2) +0.5*МАКС(E$10+E$11-$A13,0)+ГПР(E$10+E$11-$A13,$B$4:$H$8,$AL13+1)

Первое слагаемое этой суммы представляет затраты $c(q_t)$, второе – издержки на хранение в течение недели, третье слагаемое: $f_{t+1}(i_t + q_t - d_t)$.

В диапазоне AG13:AK16 определяется минимальное значение $J_t(i_t,q_t)$ для каждого заданного расхода при каждом возможном состоянии запаса. Значения $f_t(i_t)$ выводятся в диапазон B5:H8. В пятый и восьмой ряды столбцов B и H введены большие положительные числа, чтобы не допустить в расчёте отрицательных значений складского запаса на конец периода и сделать невозможным $i_t>4m$. Этот приём обеспечивает соблюдение неравенства $0 \le i_t \le 4m$. В диапазоне C5:G5 введён 0, т.к. $f_5(i)=0$ для $i=\{0, 1, 2, 3, 4\}$. В ячейку C6 вводится =AG13, и это равенство распространяется на весь диапазон C6:G8. (Возможно возникновение циклических ссылок, так как ячейки в строках 6 – 8 ссылаются на ячейки в строках 13 – 16 и наоборот. Эта проблема решается нажатием клавиши F9 или через меню "Сервис"–"Настройки"–"Вычисления".)

Итак, Excel позволяет определить оптимальную схему поставок и поддержания складского запаса в динамической модели для любого начального уровня запаса на складе. Например, в рассмотренной ситуации $i_1=0$, тогда $f_1(0)=20=J_1(0,1)$. Значит, в течение первой недели оптимальный размер поставки $q_1=1m$. Далее находится $f_2(0+1–1)=16=J_2(0,5)$, т.е. в течение второй недели будет доставлено 5 тонн. Следующий переход: $f_3(0+5–3)=7=J_3(2,0)$, что подразумевает нулевую поставку в третьем периоде. Решение $f_4(2+0–2)=J_3(0,4)$ – доставка четырёх тонн на последней неделе (табл. 4).

Таблица 4. Решение задачи оптимизации издержек
в многопериодной детерминированной модели поддержания
складских запасов средствами Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Пост.	0	1	2	3	4	5						
2	Изд.	0	4	5	6	7	8						
3													
4	Знач.	-5	0	1	2	3	4	5					
5	M5	10000	0	0	0	0	0	10000					
6	M4	10000	7	6	5	4	0	10000					
7	M3	10000	12	10	7	6.5	6	10000					
8	M2	10000	16	15	14	12	10.5	10000					
9													
10	Состояние		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
11	Поставка		0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
12	Расход												
13	4		10000	10004	10005	10006	7	8.5	10000	10004	10005	6	7.5
14	2		10000	10004	12	12.5	13	13.5	10000	11	11.5	12	12.5
15	3		10000	10004	10005	18	17.5	16	10000	10004	17	16.5	15
16	1		10000	20	20.5	21	20.5	20.5	16	19.5	20	19.5	19.5
17													

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
9													
10	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
11	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
12													
13	9	10000	10004	5	6.5	8	9.5	10000	4	5.5	7	8.5	10
14	10	7	10.5	11	11.5	9	10010.5	6.5	10	10.5	8	10009.5	10011
15	16	10000	16	15.5	14	15	16	12	14.5	13	14	15	10010.5
16	10010.5	15.5	19	18.5	18.5	10009.5	10011	15	17.5	17.5	10008.5	10010	10011.5
17													

	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
9												
10	4	4	4	4	4	4						
11	0	1	2	3	4	5	F(0)	F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	
12												
13	0	4.5	6	7.5	9	10010.5	7	6	5	4	0	1
14	6	9.5	7	10008.5	10010	10011.5	12	10	7	6.5	6	2
15	10.5	12	13	14	10009.5	10011	16	15	14	12	10.5	3
16	13.5	16.5	10007.5	10009	10010.5	10012	20	16	15.5	15	13.5	4
17												

Литература

Wayne L. Winston. Operations Research. Applications and Algorithms. Fourth Edition. Copyright © 2004 Brooks/Cole – Thomson Learning. 10 Davis Drive, Belmont, CA 94002 USA.

Блинов А.М., канд. экон. наук, доцент СПбГУЭФ

Использование современных информационных технологий ГИС в учебном процессе

В настоящее время геоинформационные системы (ГИС) занимают одно из ведущих мест среди различных информационных технологий в сфере управления и планирования. ГИС-технологии особенно активно используются в качестве поддержки принятия решений в региональном планировании и управлении, включая организацию территории, развитие инфраструктуры, природопользование и охрану окружающей среды с учетом национальных интересов.

Стабильное социальное и экономическое развитие ныне невозможно без осознания ключевой роли геоинформатики как средства изучения и удобного представления результатов для принятия управленческих решений. Мировое сообщество проявляет все большую заинтересованность в объединении информационных ресурсов, стандартизации подходов к решению возникающих проблем как магистральное условие взаимопонимания и сотрудничества, всемирного обеспечения доступов к пространственной информации различных категорий пользователей и разработчиков.

ГИС способны интегрировать разнообразную геоэкономическую информацию и представить её пользователю в виде компьютерных карт и атласов. Комбинирование аналитических возможностей ГИС с другими программами математического моделирования и искусственного интеллекта рождает новый вид информационной технологии – пространственные системы поддержки решений, в которых благодаря наличию функциональной связи между геоданными и имитационно-оптимизационными моделями создается интегрированная информационно-аналитическая среда.

Глобальная и национальная инфраструктуры пространственных данных со всеми их прикладными задачами становятся решающим условием обеспече-