Предисловие

"... действенность анализа зависит не от истолкования символов,
а исключительно от законов их комбинации ...
... Операции рассматриваются сами по себе,
независимо от различных материй,
к которым они могут быть приложены ..."

Джорж БУЛЬ

(1815–1864, Англия)

Великий ученый-самоучка,
основоположник современной алгебры логики

"... сгруппировать математические операции,
научиться их классифицировать по степени *трудности*,
а не по внешним признакам ...
— вот задачи математиков будущего
так, как я их понимаю ..."

Эварист ГАЛУА

(1811–1832, Франция),

Легендарных математик и революционер,
основоположник современной алгебры[1].

Известные изречения Дж. Буля и Э. Галуа предпосланы в качестве эпиграфов к данной книге, хотя в эпоху, когда жили эти ученые, цифровые, а тем более микроэлектронные, устройства вообще не существовали. И тем не менее современная математическая теория (конечная алгебра и логика) подобных устройств зиждется на фундаментальных исследованиях именно этих ученых, сумевших абстрагироваться от *природы объектов*, над которыми выполняются те или иные действия (операции), и сконцентрировать преимущественное внимание *на свойствах самих операций*.

Эта *неординарная* идея предопределила развитие теоретической и прикладной математики!

[1]Работы Э. Галуа не были поняты его современниками (в том числе академиками! — Ж. Фурье, О. Коши, С. Пуассоном, С. Лакруа), что на многие десятилетия задержало развитие науки. Лишь в конце прошлого — начале настоящего века работы гениального ученого были осмыслены. Они не только обобщали разрозненные результаты средневековых и современных ему математиков, предвосхищали и пролагали основные направления развития алгебры, но и ознаменовали переворот в развитии самой математики.

В настоящее время идеи Э. Галуа играют фундаментальную роль во всей математике и во многих разделах естествознания; он — основоположник теории групп (см. § 1.4), теории конечных полей, или полей Галуа (§ 1.6), теории автоморфизмов (§ 1.2), теории инвариантности и так называемой теории Галуа, элементы которой в современной трактовке изложены в § 2.6.

Галуа, как революционер, боролся в рядах самой прогрессивной группировки своего времени, неоднократно отбывал тюремное заключение за политическую деятельность; в двадцатилетнем возрасте, защищая честь женщины, Эварист Галуа погиб на дуэли (как считают исследователи, подстроенной, по-видимому, его политическими противниками).

За последние годы достигнуты большие успехи в разработке и серийном освоении цифровых интегральных микросхем, которые используются в аппаратуре самого различного назначения — вычислительно-управляющих системах, информационно-измерительных приборах, приемо-передающих средствах и в другой кибернетической, измерительной и радиотехнической аппаратуре.

Анализ и синтез дискретных и гибридных (аналого-цифровых) вычислительных и управляющих устройств; систем сбора, записи-воспроизведения, преобразования, передачи и обработки информации; исследование динамики (переходных процессов) и надежности автоматов; поиск их неисправностей; помехоустойчивое кодирование с контролем (обнаружением и исправлением) ошибок; проектирование цифровых микроэлектронных (в частности, многозначных) логических систем и т.д. — вот далеко н е п о л н ы й перечень научных проблем и технических задач, требующих использования конечной алгебры, дискретной и непрерывной логики.

Поэтому перед высшей школой стоит сложная и чрезвычайно важная задача: подготовка кадров, владеющих современными методами проектирования цифровой микроэлектронной аппаратуры, как на базе серийно выпускаемых двоичных логических интегральных схемах, так и на базе многозначных элементов, находящихся в стадии разработки и освоения.

При этом центр тяжести в преподавании (подготовке разработчиков цифровых микроэлектронных устройств) смещается на стадию логического проектирования на основе ф о р м а л ь н ы х методов синтеза.

Математической базой проектирования логических схем и устройств (и двоичных, и многозначных) являются алгебра на конечных множествах и логика (двоичная и многозначная — *дискретная* и *непрерывная*).

На наш взгляд, необходимые разделы конечной алгебры и многозначной логики изучаются явно недостаточно студентами, специализирующимися в области связи, радиотехники, информатики, автоматичекого управления, кибернетики, аналого-цифровой измерительной техники, а д о с т у п н а я для них учебная литература практически отсутствует.

Данное издание призвано восполнить указанный пробел в литературе; в нем излагаются основы математического аппарата, используемого при синтезе самых разнообразных цифровых устройств. Приводятся сведения по конечным алгебрам, алгебре отношений, двоичной и многозначной (дискретной и непрерывной) логике. Дается представление о функциональной п о л н о т е (необходимые и достаточные условия, критерии). Излагаются методы синтеза — канонические и полиномиальные представления логических устройств, методы решения логических (двоичных и многозначных) уравнений и их использования в теории цифровых схем; регулярные представления многозначных функций в недистрибутивных алгебрах.

Материал подобран так, что от читателя не требуется особая математическая подготовка. Однако многие рассматриваемые вопросы не элементарны, поэтому для облегчения усвоения материала приведены многочисленные примеры, упражнения и задания, снабженные методическими указаниями и ответами.

В заключение хотелось бы напомнить шутливые слова Д'Аламбера[1]:

" Работайте, работайте — а понимание придет потом" ...

Универсальные обозначения (словарик)

а) принадлежность элемента a к множеству A обозначается как $a \in A$;
аналогично непринадлежность обозначается как $a \notin A$;
символ включения $\subset$ выделяет в множестве A подмножество A_1, т.е. $A_1 \subset A$;

б) справедливость некоторого соотношения Υ при любых значениях переменной x записывается с помощью квантора *общности* $\forall$ в виде

$$\forall x, [\Upsilon]$$

(читается: "для всякого значения x имеет место соотношение Υ ");

в) справедливость некоторого соотношения Υ хотя бы для одного значения переменной x записывается с помощью квантора *существования* $\exists$ в виде

$$\exists x, [\Upsilon]$$

(читается: "существует такое значение x, что выполняется Υ");

г) справедливость некоторого соотношения Υ лишь для одного (единственного!) значения переменной x записывается с помощью квантора *существования и единственности* $\exists\,!$ в виде

$$\exists! x, [\Upsilon]$$

(читается: "существует единственное значение x для которого имеет место Υ";

для того чтобы не повторять знаки $\in$, $\forall$, $\exists$ и др., в скобках может стоять не одна переменная, а несколько; например $\forall (a,b) \in A$ и т.п.;

д) знак $\triangleq$ читается: "обозначим" или "равно по определению".

е) переход элемента a в элемент b обозначается так: $a \to b$ ("переобозначить"), а взаимный переход как $a \leftrightarrow b$ ("поменять местами");

ж) знак импликации $\Rightarrow$ означает "следует, влечет",
а знак $\Leftrightarrow$ означает "эквивалентно"; например,

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \text{ или } (A = B)];$$

Другие обозначения мы введем по ходу изложения.

[1] Жан Д'Аламбер (1717–1783) — видный французский математик и физик